Titel:
Über die Nichtapproximierbarkeit des Traveling-Salesman-Problems mit β-Dreiecksungleichung

Vortragender:
Hans-Joachim Böckenhauer, Lehrstuhl für Informatik I, RWTH Aachen

Zusammenfassung:
Das Traveling-Salesman-Problem mit β-Dreiecksungleichung (Δ_β-TSP) ist das Teilproblem des TSP, bei dem die Kantenkosten für ein $\beta \geq \frac{1}{2}$ die folgende β-Dreiecksungleichung erfüllen.

$$cost(\{x,y\}) \leq \beta \cdot (cost(\{x,z\}) + cost(\{z,y\})) \text{ für alle Knoten } x, y \text{ und } z.$$

Im Fall $\beta = 1$ ergibt sich dann das metrische TSP (Δ-TSP), im Fall $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ sprechen wir von der verschärften Dreiecksungleichung und im Fall $\beta > 1$ von der relaxierten Dreiecksungleichung.
In diesem Vortrag werden wir verbesserte untere Schranken für die Approximierbarkeit des Δ_β -TSP betrachten. Zunächst stellen wir eine verbesserte untere Schranke für das metrische TSP vor. Dann zeigen wir, wie sich unsere Beweismethode für den Fall der verschärften Dreiecksungleichung verallgemeinern läßt, und wie sie dazu verwendet werden kann, bessere untere Schranken für das TSP mit relaxierter Dreiecksungleichung zu zeigen.
Unter der Voraussetung $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ erhalten wir für das Δ-TSP eine untere Schranke auf die Polynomialzeit-Approximierbarkeit von $\frac{3813}{3812} - \varepsilon$ (für jedes kleine $\varepsilon > 0$). Dies ist eine Verbesserung gegenüber der bisher bekannten unteren Schranke von $\frac{5381}{5380} - \varepsilon$ (für jedes kleine $\varepsilon > 0$), die von Engebretsen bewiesen wurde [En99]. Engebretsen verwendete eine lückenerhaltende Reduktion von einem Spezialfall eines Problems über lineare Gleichungen, dem sogenannten LinEq2-2(3)-Problem, auf das TSP-Teilproblem, bei dem alle Kantenkosten gleich 1 oder 2 sind. Wir verallgemeinern diese Beweistechnik und betrachten eine Reduktion von LinEq2-2(3) auf solche Δ-TSP-Instanzen, bei denen alle Kantenkosten aus $\{1, 2, 3\}$ sind. Diese Modifikation macht es erforderlich, die Konstruktion von Engebretsen wesentlich zu ändern, und es sind einige neue, zusätzliche technische Betrachtungen notwendig.
Mit einer Modifikation unseres Beweises für das Δ-TSP erhalten wir eine untere Schranke für die Approximierbarkeit des TSP mit relaxierter Dreiecksungleichung von $\frac{3803+10\beta}{3804+8\beta} - \varepsilon$ und eine untere Schranke für die Approximierbarkeit des TSP mit verschärfter Dreiecksungleichung ($\frac{1}{2} < \beta < 1$) von $\frac{7611+10\beta^2_5\beta}{7612+8\beta^2+4\beta} - \varepsilon$.
Dieses Ergebnis ist besonders interessant, weil es zeigt, daß das TSP sogar dann noch $\mathcal{APX}$-schwer ist, wenn man sich dem trivialen Fall, daß alle Kanten die gleichen Kosten haben (d.h. $\beta = \frac{1}{2}$), beliebig nähert.