Deterministische Turingmaschinen zwischen Real- und Linearzeit

Martin Kutrib
Institut für Informatik
Universität Gießen
Arndtstr. 2, 35392 Gießen
kutrib@informatik.uni-giessen.de

Viele der Ergebnisse für deterministische Turingmaschinen mit höchstens linearer Zeitbeschränkung stammen aus den Anfangszeiten der Komplexitätstheorie. Während für fast alle nichtdeterministischen Modelle und deterministische Einband-Maschinen bekannt ist, daß die Realzeit- und Linearzeitklassen zusammenfallen, ergeben sich signifikante Unterschiede für deterministische Maschinen mit mindestens zwei Bändern: Hier sind die Realzeitklassen jeweils echt in den Linearzeitklassen enthalten.

Für den Bereich dazwischen liefern die Zeithierarchiesätze keine Antwort. Z.B. ist für k-Band-Turingmaschinen die echte Inklusion $\mathsf{DTIME}_k(t_1) \subset \mathsf{DTIME}_k(t_2)$ bekannt, sofern $k \geq 2$, $t_1 \in o(t_2)$ und t_2 zeitkonstruierbar sind. (Für Mehrband-Maschinen muß $t_1 \cdot \log(t_1) \in o(t_2)$ gelten.) Die Hierarchiebedingung $t_1 \in o(t_2)$ wird aber aufgrund der Möglichkeit zur linearen Beschleunigung zur kleinstmöglichen. Es gilt bekanntlich $\mathsf{DTIME}(t) = \mathsf{DTIME}(Lin(t))$ für Mehrband- und k-Band-Maschinen, sofern $t \geq c \cdot n$ mit $c > 1$ ist. Andererseits sind damit wegen der Bedingung $c > 1$ ebenfalls keine Aussagen über den Bereich zwischen Real- und Linearzeit möglich.

Wir betrachten die Zeitkomplexitätsklassen $\mathsf{DTIME}(n + r(n))$ mit sublinearen Abbildungen r und zeigen eine unendliche, echte Hierarchie über die r:

Für zwei Abbildungen $r : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ und $r' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ mit $r' \in o(r)$ und r^{-1} zeitkonstruierbar gilt: $\mathsf{DTIME}(n + r'(n)) \subset \mathsf{DTIME}(n + r(n))$.

Da eine Beschleunigung von $n + r(n)$ nach $n + \varepsilon \cdot r(n)$, $\varepsilon > 0$, möglich ist, folgt, daß die Hierarchie dicht ist.

Die untersuchten Klassen sind weder unter Konkatenationsabschluß noch unter Konkatenation abgeschlossen. Beide Abschlußeigenschaften stimmen mit denen der Realzeit-Maschinen überein und sind für Linearzeit offen.

Die Ergebnisse lassen sich axiomatisch auf andere Berechnungsmodelle übertragen. Sie gelten z.B. auch für mehrdimensionale Turingmaschinen und zum Teil für iterative Arrays.